BREVET BLANC de MATHEMATIQUES n°1
Janvier 2012 - durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées.
L'orthographe, le soin et la présentation sont notés sur ***4 points***.

Activités numériques (12 points)

Exercice 1 (3 pts)

Un plaquiste souhaite recouvrir un mur rectangulaire avec des plaques isolantes.
Ce mur mesure 270 cm de haut sur 330 cm de large.
Les plaques isolantes doivent être de forme carrée, les plus grandes possibles et il ne veut pas de chutes.

1. Calculer le PGCD des nombres 330 et 270 en indiquant la méthode utilisée.

2. En déduire les dimensions d'une de ces plaques isolantes et le nombre de plaques nécessaires.

Exercice 2 (3 pts)

On donne le programme de calcul suivant :

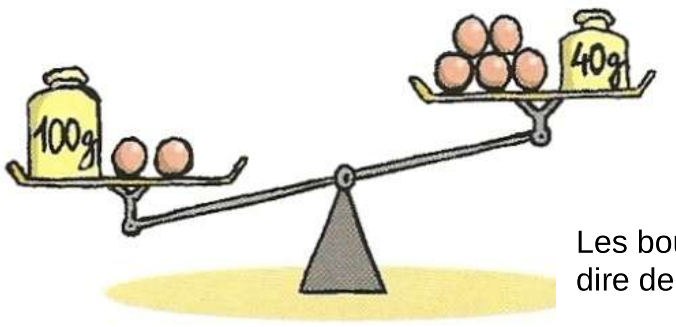
Choisir un nombre.
Multiplier ce nombre par 4.
Ajouter 6.
Ecrire le résultat.

1. Calculer la valeur exacte du résultat obtenu lorsque :
   a) le nombre choisi est 1,2.
   b) le nombre choisi est $\frac{1}{3}$ (écris les étapes)
   c) le nombre choisi est x.

2. Quel nombre doit-on choisir pour que le résultat soit égal à 15 ?

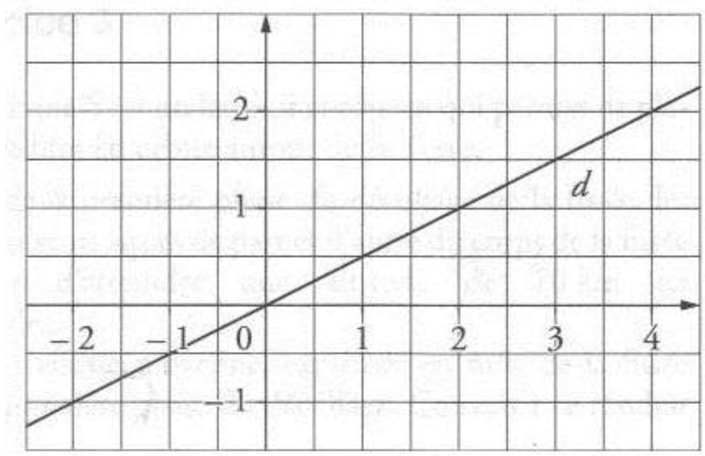
3. Quel nombre doit-on choisir pour que le résultat soit égal au nombre choisi lui-même ?

Exercice 3 (3 pts)



Les boules ont toutes la même masse. Que peut-on dire de la masse x (en grammes) d'une boule ?

Exercice 4 (3 pts)



La droite *d* est la représentation graphique d'une fonction *f*.

1ere partie

Pour chaque question de ce QCM (Questionnaire à Choix Multiple) une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse.

		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1.	L'image de 2 par la fonction *f* est :	1	4	– 1
2.	$f(-1) =$	–2	0,5	–0,5
3.	L'antécédent de 2 par la fonction *f* est :	2	4	1
4.	Si $f(x) = -1$ alors $x =$	–0,5	–2	–1

2ème partie

A propos d'une autre fonction *g*, on sait seulement que : $g(-1) = g(2) = 1$.
Tracer sur le graphique ci-dessus une représentation graphique possible de la fonction *g*.

Activités géométriques (12 points)

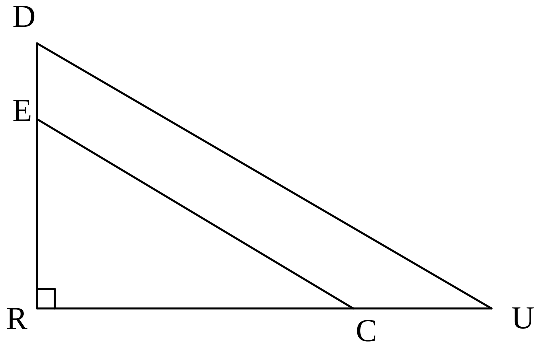
Exercice 1 (4 pts)

Dans la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, on a :
E ∈ [RD], C ∈ [RU], RE = 3 cm, ED = 1,5 cm, RC = 2 cm et RU = 3 cm.

1. Démontrer que les droites (EC) et (DU) sont parallèles.

2. Calculer le rapport d'agrandissement permettant de passer du triangle REC au triangle RDU.

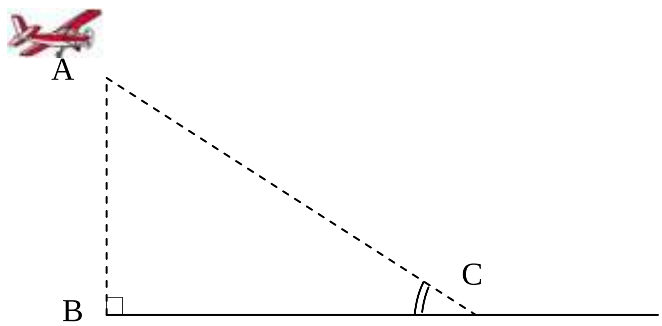
3. Montrer que l'aire du triangle RDU est égale à 2,25 fois l'aire du triangle REC.



Exercice 2 (4 pts)

Un avion de tourisme est en phase d'approche de l'aérodrome de Magenta suivant le trajet AC.
On donne :

- altitude de l'avion : AB = 1 058 m ;
- $\widehat{ACB} = 30°$.

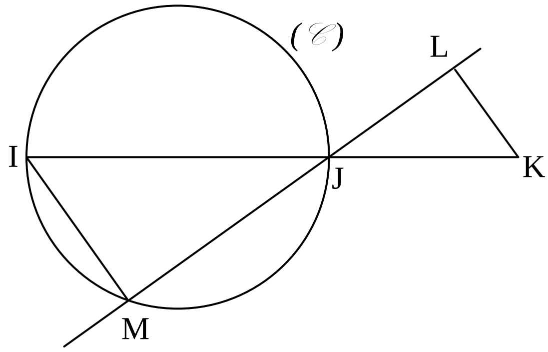


1. Démontrer que la longueur AC qu'il reste à parcourir à l'avion pour rejoindre le point d'atterrissage C est égale à 2 116 m.

2. Sachant que cet avion se déplace de A vers C avec une vitesse constante *v* de 92 mètres par seconde, calculer le temps qu'il mettra pour parcourir la distance AC.

Exercice 3 (4 pts)

JKL est un triangle tel que : JK = 6 cm ; JL = 3,6 cm et KL = 4,8 cm.
J est un point du segment [IK] et IJ = 9 cm.
$(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre [IJ].
La droite (JL) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en M.



La figure n'est pas en vraie grandeur et il n'est pas demandé de la reproduire.

1. Démontrer que le triangle JKL est rectangle.

2. Justifier que le triangle IJM est rectangle.

3. Déterminer la longueur JM.

Problème (12 points)

Les 3 parties sont indépendantes.

Le directeur d'un théâtre sait qu'il reçoit environ 500 spectateurs quand le prix d'une place est de 20 euros. Il a constaté que chaque réduction de 1 € du prix d'une place attire 50 spectateurs de plus.

Première partie :

1. Compléter le tableau suivant.

Réduction en euros	Prix de la place en euros	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
0	20	500	20 × 500 = 10 000 €
1	19	…	… = …
…	…	600	… = …
…	16	…	… = …

2. On appelle x le montant de la réduction (en euros). Compléter le tableau suivant.

Réduction en euros	Prix de la place en euros	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
x	…	…	…

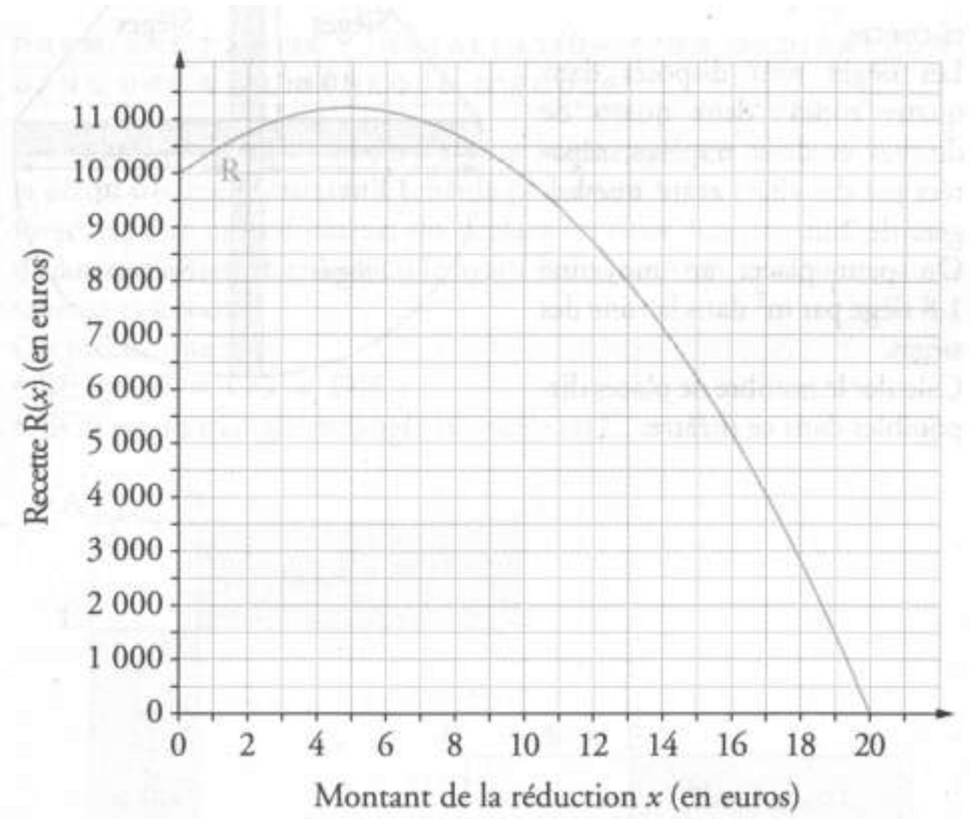
3. Développer l'expression de la recette obtenue à la question 2.

Deuxième partie :

Le directeur de la salle souhaite déterminer le prix d'une place lui assurant la meilleure recette.

Il utilise la fonction *R* donnant la recette (en euros) en fonction du montant x de la réduction (en euros).

Sa courbe représentative est donnée ci-contre.



Par lecture graphique, répondre aux questions ci-dessous (on attend des valeurs approchées avec la précision permise par le graphique et **on fera apparaître sur le graphique les tracés nécessaires à la lecture**) :

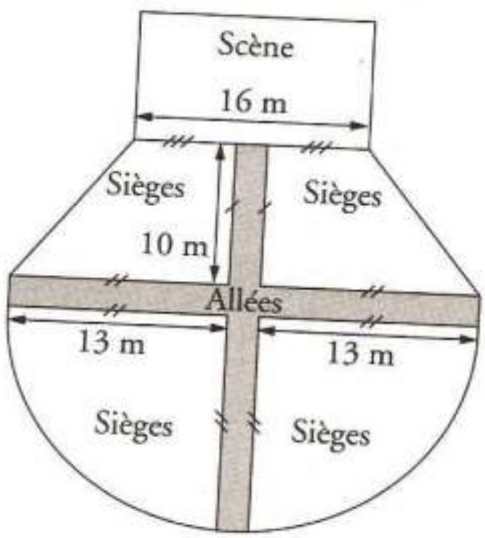
1. Quelle est la recette pour une réduction de 2 euros ?
2. Quelle est le montant de la réduction pour une recette de 4 050 euros ? Quel est alors le prix d'une place ?
3. Quelle est l'image de 8 par la fonction *R* ? Interpréter ce résultat pour le problème.
4. Quelle est la recette maximale ? Quel est alors le prix d'une place ?

Troisième partie :

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

La salle de spectacle a la forme ci-contre.
Les sièges sont disposés dans quatre zones : deux quarts de disques et deux trapèzes, séparés par des allées ayant une largeur de 2 m.
On peut placer en moyenne 1,8 siège par m^2 dans la zone des sièges.

Calculer le nombre de places disponibles dans ce théâtre.



***Rappel** : L'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\frac{(B+b)\times h}{2}$ où B est la longueur de la grande base, b celle de la petite base et h celle de la hauteur du trapèze.*

CORRECTION

Activités numériques (12 points)

Exercice 1

1. Calculer le PGCD des nombres 330 et 270 en indiquant la méthode utilisée.

Calculons- le à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

PGCD (330 ; 270) = PGCD (270 ; 60) = PGCD (60 ; 30) = $\boxed{30}$ (dernier reste non nul)

2. En déduire les dimensions d'une de ces plaques isolantes et le nombre de plaques nécessaires.

Le côté de chaque plaque est le PGCD de 330 et 270, soit $\boxed{30 \text{ cm}}$.

En hauteur on peut mettre 270 ÷ 30 = 9 plaques

En largeur on peut mettre 330 ÷ 30 = 11 plaques

Le nombre de plaques nécessaires est 9×11 = $\boxed{99 \text{ plaques}}$

Exercice 2

On donne le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre.
Multiplier ce nombre par 4.
Ajouter 6.
Ecrire le résultat.

1. Calculer la valeur exacte du résultat obtenu lorsque :

a) le nombre choisi est 1,2.

On obtient : $1{,}2\times 4 + 6 = \boxed{10{,}8}$

b) le nombre choisi est $\frac{1}{3}$.

On obtient : $\frac{1}{3}\times 4 + 6 = \frac{4}{3} + 6 = \frac{4}{3} + \frac{18}{3} = \boxed{\frac{22}{3}}$

c) le nombre choisi est x.

On obtient : $x\times 4 + 6 = \boxed{4x + 6}$

2. Quel nombre doit-on choisir pour que le résultat soit égal à 15 ?

J'appelle x le nombre cherché

Mise en équation : $\mathbf{4x + 6 = 15}$

Résolution :

$4x = 15 - 6$

$4x = 9$

$x = 9 \div 4$

$\boxed{x = 2{,}25}$ Le nombre cherché est 2,25

3. Quel nombre doit-on choisir pour que le résultat soit égal au nombre choisi lui-même ?

J'appelle x le nombre cherché

Mise en équation : $\mathbf{4x + 6 = x}$

Résolution :

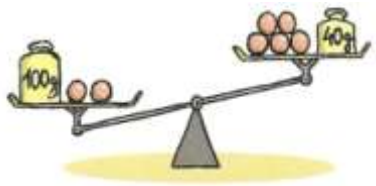
$4x - x = -6$

$3x = -6$

$x = -6 \div 3$

$\boxed{x = -2}$ Le nombre cherché est –2

Exercice 3



Les boules ont toutes la même masse. Que peut-on dire de la masse *x* (en grammes) d'une boule ?

Soit *x* la masse d'une boule. Comme la balance penche à gauche, le contenu du plateau gauche est supérieur à celui du plateau droit, donc

$2x + 100 > 5x + 40$

Résolvons cette inéquation :

$2x - 5x > 40 - 100$

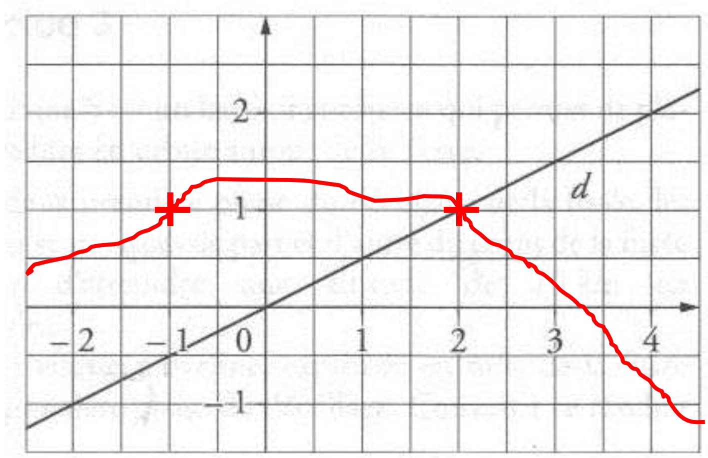
$-3x > -60$

$x < \frac{-60}{-3}$

$\boxed{x < 20}$

On peut affirmer que la masse d'une boule est strictement inférieure à 20 grammes.

Exercice 4



		Réponse A	Réponse B	Réponse C
1.	L'image de 2 par la fonction *f* est :	1	4	– 1
2.	*f*(–1) =	–2	0,5	–0,5
3.	L'antécédent de 2 par la fonction *f* est :	2	4	1
4.	Si $f(x) = -1$ alors $x =$	–0,5	–2	–1

2ème partie

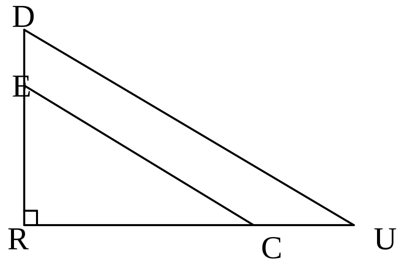
A propos d'une autre fonction *g*, on sait seulement que : $g(-1) = g(2) = 1$.

Tracer sur le graphique ci-dessus une représentation graphique possible de la fonction *g*.

Fait en rouge

Activités géométriques (12 points)

Exercice 1



Dans la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, on a :
E ∈ [RD], C ∈ [RU], RE = 3 cm, ED = 1,5 cm, RC = 2 cm et RU = 3 cm.

1. Démontrer que les droites (EC) et (DU) sont parallèles.

Les droites (DE) et (UC) sont sécantes en R

Calculons d'une part : $\frac{\text{RE}}{\text{RD}} = \frac{3}{3+1,5} = \frac{2}{3}$

Calculons d'autre part : $\frac{\text{RC}}{\text{RU}} = \frac{2}{3}$

Comme $\frac{\text{RE}}{\text{RD}} = \frac{\text{RC}}{\text{RU}}$ et comme les points R, E, D sont alignés dans le même ordre que R, C, U alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (EC) et (DU) sont parallèles**.

2. Calculer le rapport d'agrandissement permettant de passer du triangle REC au triangle RDU.

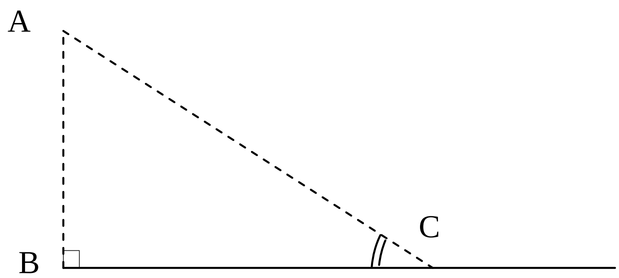
Le rapport de l'agrandissement est (d'après la leçon) : $k = \frac{\text{RD}}{\text{RE}} = \frac{4,5}{3} = 1,5$

3. Montrer que l'aire du triangle RDU est égale à 2,25 fois l'aire du triangle REC.

Dans un agrandissement de rapport 1,5, les aires sont multipliées par $1,5^2 = 2,25$.

Donc l'aire du triangle RDU est égale à 2,25 fois l'aire du triangle REC

Exercice 2



On donne :

- altitude de l'avion : AB = 1 058 m ;
- $\widehat{ACB} = 30°$.

1. Démontrer que la longueur AC qu'il reste à parcourir à l'avion pour rejoindre le point d'atterrissage C est égale à 2 116 m.

Le triangle ABC est rectangle en B.

$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$.

$AC = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{1058}{\sin 30°} = 2\,116\ m.$

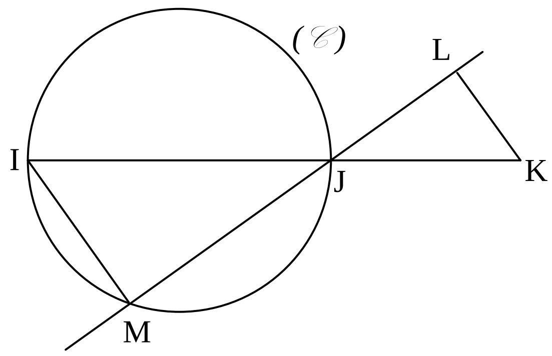
2. Sachant que cet avion se déplace de A vers C avec une vitesse constante *v* de 92 mètres par seconde, calculer le temps qu'il mettra pour parcourir la distance AC.

Utilisons la formule $V = \frac{d}{t}$

$92 = \frac{2116}{t}$ donc $t = \frac{2116}{92} = 23$

L'avion mettra 23 secondes pour atterrir.

Exercice 3 (3,5 pts)



JKL est un triangle tel que : JK = 6 cm ; JL = 3,6 cm et KL = 4,8 cm.
J est un point du segment [IK] et IJ = 9 cm.
(𝒞) est le cercle de diamètre [IJ].
La droite (JL) coupe le cercle (𝒞) en M.

La figure n'est pas en vraie grandeur et il n'est pas demandé de la reproduire.

1. Démontrer que le triangle JKL est rectangle.

$JK^2 = 6 = 36$ et $JL^2 + KL^2 = 3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 12{,}96 + 23{,}04 = 36$ donc $JK^2 = JL^2 + KL^2$.
On en déduit que JKL est rectangle en L d'après la propriété réciproque de Pythagore.

2. Justifier que le triangle IJM est rectangle.

IJM est un triangle rectangle en M car il est inscrit dans le cercle de diamètre [IJ].

3. Déterminer la longueur JM.

IJM est un triangle. L et K appartiennent respectivement aux droites (JM) et (IJ). De plus, comme (IM) et (LK) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (LM).
On peut donc utiliser le théorème de Thalès :
$\frac{JL}{JM} = \frac{JK}{JI} = \frac{LK}{IM}$ donc $\frac{3{,}6}{JM} = \frac{6}{9} = \frac{4{,}8}{IM}$ et donc $JM = \frac{3{,}6 \times 9}{6} = 5{,}4\ cm.$

Problème (12 points)

Le directeur d'un théâtre sait qu'il reçoit environ 500 spectateurs quand le prix d'une place est de 20 euros. Il a constaté que chaque réduction de 1 € du prix d'une place attire 50 spectateurs de plus.

Première partie :

1. Compléter le tableau suivant.

Réduction en euros	Prix de la place en euros	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
0	20	500	20 × 500 = 10 000 €
1	19	550	19 × 550 = 10 450 €
2	18	600	18 × 600 = 10 800 €
4	16	700	16 × 700 = 11 200 €

2. On appelle x le montant de la réduction (en euros). Compléter le tableau suivant.

Réduction en euros	Prix de la place en euros	Nombre de spectateurs	Recette du spectacle
x	$20 - x$	$500 + 50x$	$(20 - x)(500 + 50x)$

3. Développer l'expression de la recette obtenue à la question 2.

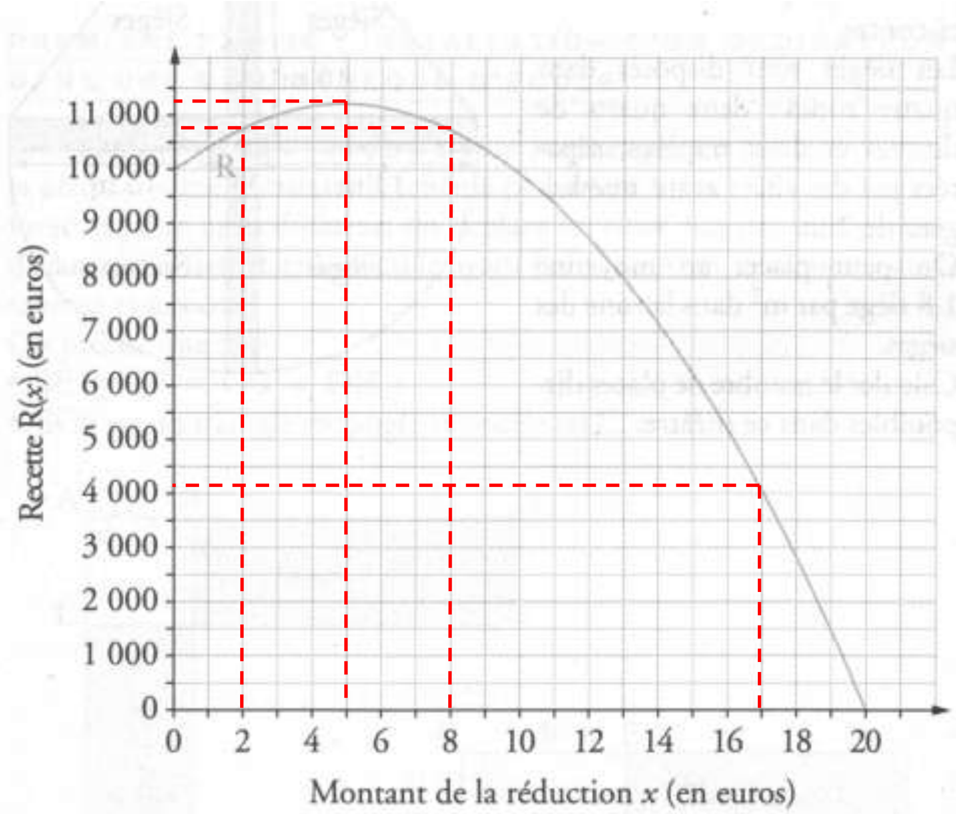
$$(20 - x)(500 + 50x) = 10\,000 + 1\,000x - 500x - 50x^2 = \boxed{10\,000 + 500x - 50x^2}$$

<u>Deuxième partie</u> :

Le directeur de la salle souhaite déterminer le prix d'une place lui assurant la meilleure recette.

Il utilise la fonction *R* donnant la recette (en euros) en fonction du montant x de la réduction (en euros).

Sa courbe représentative est donnée ci-contre.



Par lecture graphique, répondre aux questions ci-dessous (on attend des valeurs approchées avec la précision permise par le graphique et **on fera apparaître sur le graphique les tracés nécessaires à la lecture**) :

1. Quelle est la recette pour une réduction de 2 euros ?

La recette est de 10 800 €.

2. Quelle est le montant de la réduction pour une recette de 4 050 euros ? Quel est alors le prix d'une place ?

Le montant de la réduction pour une recette de 4 050 € est de 17 €. Le prix d'une place est alors de 3 € seulement.

3. Quelle est l'image de 8 par la fonction *R* ? Interpréter ce résultat pour le problème.

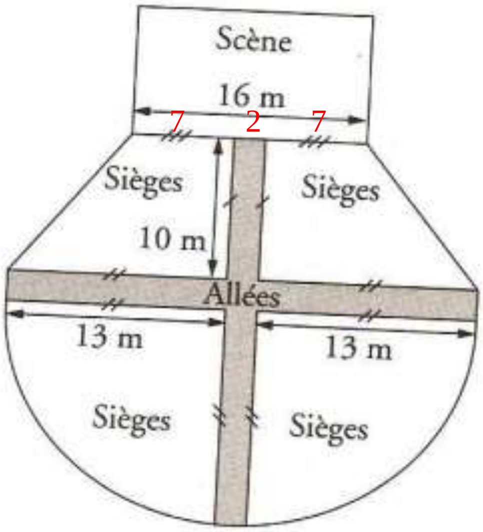
L'image de 8 par la fonction *R* est 10 800. Ce résultat signifie que pour une réduction de 8 €, la recette sera de 10 800 €.

4. Quelle est la recette maximale ? Quel est alors le prix d'une place ?

La recette maximale est de 11 250 €. Le prix d'une place est alors de 20 – 5 = 15 €.

Troisième partie :

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.



La salle de spectacle a la forme ci-contre.
Les sièges sont disposés dans quatre zones : deux quarts de disques et deux trapèzes, séparés par des allées ayant une largeur de 2 m.
On peut placer en moyenne 1,8 siège par m^2 dans la zone des sièges.

Calculer le nombre de places disponibles dans ce théâtre.

Rappel *: L'aire d'un trapèze est donnée par la formule* $\frac{(B+b)\times h}{2}$ *où B est la longueur de la grande base, b celle de la petite base et h celle de la hauteur du trapèze.*

Calcul de l'aire d'un trapèze : $\frac{(13+7)\times 10}{2} = 100\ m^2$.

Calcul de l'aire d'un quart de disque : $\frac{\pi\times 13^2}{4} = \frac{169\pi}{4}\ m^2$.

Calcul de l'aire totale de la zone des sièges : $100 \times 2 + \frac{169\pi}{4} \times 2 = 200 + 84{,}5\pi \approx 465{,}5\ m^2$.

Calcul du nombre de sièges : $465{,}5 \times 1{,}8 \approx 838$.

Il y a environ 838 places disponibles dans ce théatre.