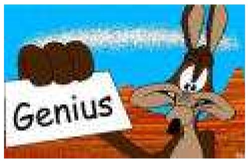
BREVET BLANC de MATHEMATIQUES n° 2

Avril 2009 - durée : 2 heures

Rendre le sujet avec la copie

Les calculatrices sont autorisées.
L'orthographe, le soin et la présentation sont notés sur 4 points.

Activités numériques (12 points)



Exercice 1

1. On donne : A = $-\frac{1}{3}+\frac{14}{3}\div\frac{35}{12}$

Calculer le nombre A. Écrire les étapes et donner le résultat sous forme de **fraction irréductible**.

2. On donne B = $\frac{81\times10^{-5}\times14\times\left(10^{2}\right)^{3}}{7\times10^{4}}$

Calculer le nombre B. Donner **l'écriture décimale** et **l'écriture scientifique** du nombre B.

3. On donne C = $2-\sqrt{2}$ et D = $2+\sqrt{2}$.

a. Prouver que C $\times$ D est un nombre entier.

b. Calculer C^2 , écrire le résultat sous la forme $a+b\sqrt{2}$, avec a et b nombres entiers relatifs.

4. On donne : E = $2\sqrt{45}-5\sqrt{20}-\sqrt{80}$.

Ecrire E sous la forme $a\sqrt{5}$, où a est un nombre entier relatif.

Exercice 2

Pour les Jeux Olympiques d'hiver, un magasin de sport affiche un article à 120 €.

1. Le commerçant accorde une remise de 20 % sur ce prix. Calculer le prix de vente après la remise.

2. Se rendant compte qu'il vent alors à perte, il décide d'augmenter ce nouveau prix de 10 %.
Calculer le prix de vente après l'augmentation.

3. Quel est le pourcentage de remise accordé finalement, entre le prix initial et le prix final ? Expliquer.

Exercice 3

On donne la fonction f définie par :

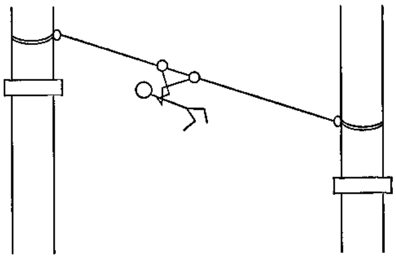
$$f(x) = (2x-3)(3x-1)+(2x-3)^2$$

1. Développer et réduire $f(x)$.

2. Calculer $f(\sqrt{2})$: l'image de $\sqrt{2}$ par fa fonction f .
Écrire le résultat sous la forme a + $b\sqrt{2}$ avec a et b entiers relatifs.

Activités géométriques (12 points)

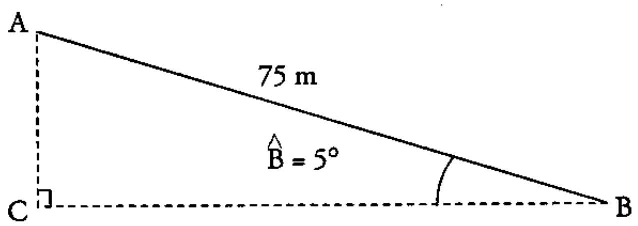
Exercice 1



Dans un parc de jeux, une épreuve consiste à parcourir une certaine distance entre deux arbres avec une *tyrolienne* (sorte de poulie qui permet de glisser le long d'un câble).

La situation est schématisée dans un plan vertical par le triangle rectangle ABC ci-dessous, où A et B désignent les points de fixation du câble sur les arbres, le segment [AB] représentant le câble.

On sait que le câble mesure 75 mètres de long, et qu'il fait un angle de 5° avec l'horizontale représentée par le segment [BC] sur le schéma.



1. Calculer la distance BC séparant les deux arbres. Arrondir au centimètre près.

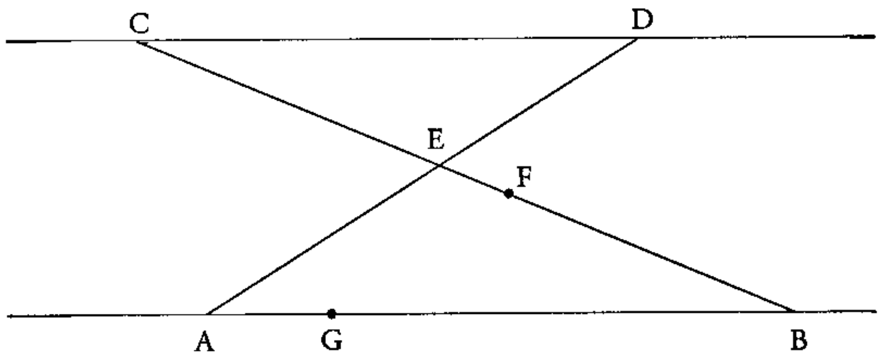
2. Calculer AC (la différence de hauteur entre les deux plateformes). Donner la troncature au centimètre près.

Exercice 2

L'unité est le centimètre.

Dans la figure ci-dessous, les droites (AB) et (CD) **sont parallèles**.
Les droites (AD) et (BC) se coupent en E.

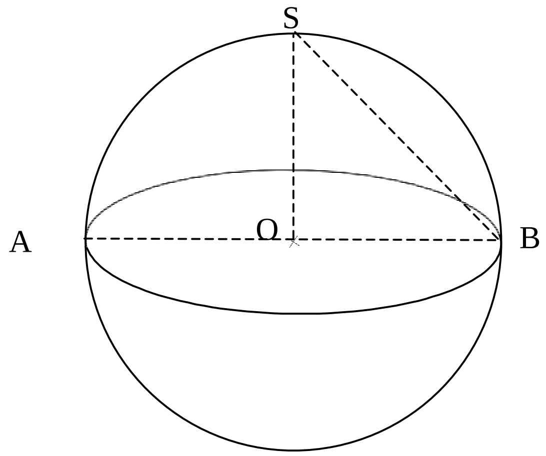
<u>On donne</u> : DE = 6 AE = 10 AB = 20 et BE = 16



1. Calculer la longueur CD.

2. Les points F et G appartiennent respectivement aux segments [BC] et [AB].
On donne : BF = 12,8 et BG = 16.
Prouver que les droites (FG) et (AE) sont parallèles

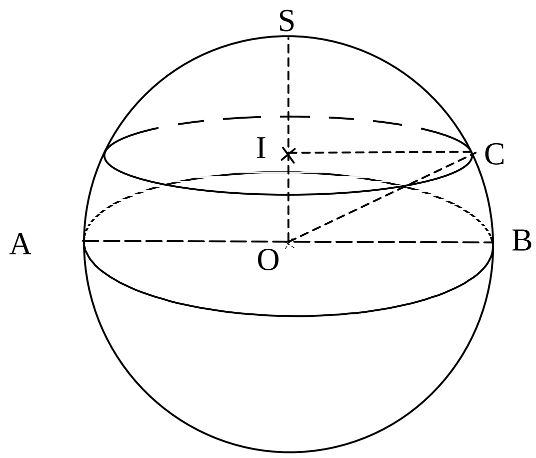
Exercice 3



Une lampe a la forme d'une boule de centre O et de **rayon 30 cm**.
[AB] est un diamètre et [SO] un rayon de cette boule (voir la figure).

1. Calculer le volume de la boule ;
   donner la valeur arrondie **au litre**.

2. On donne SB = $30\sqrt{2}$. Prouver que la droite (SO) est perpendiculaire à la droite (AB).

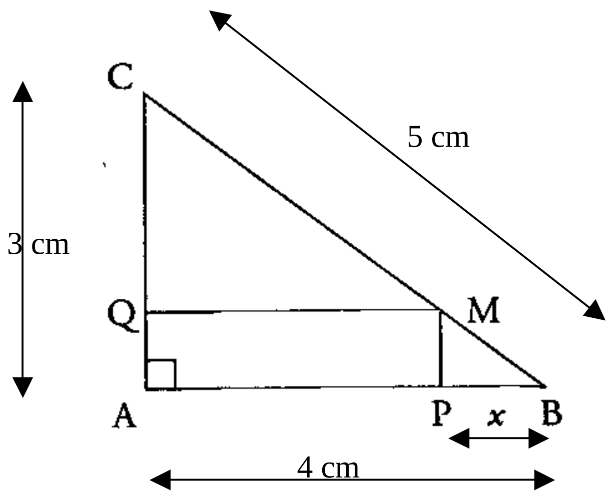


3. Soit **I le milieu de [SO]**. On coupe la boule par un plan passant par I et perpendiculaire à (SO).

   a. Dessiner à l'échelle $\frac{1}{5}$ le triangle OIC.

   b. Calculer le rayon du disque obtenu comme section.
   Donner l'arrondi au centimètre

Problème (12 points)



ABC est un triangle rectangle en A avec :

AB = 4 cm   AC = 3 cm   et   BC = 5 cm.

- M est un point de BC]
- P est un point de [AB]
- Q est un point de [AC]

} tels que APMQ soit un **rectangle**.

On note x la longueur BP en centimètres.

❖ Partie A : un périmètre

1. En utilisant le théorème de Thalès, prouver que : PM = $\frac{3x}{4}$ et BM = $\frac{5x}{4}$

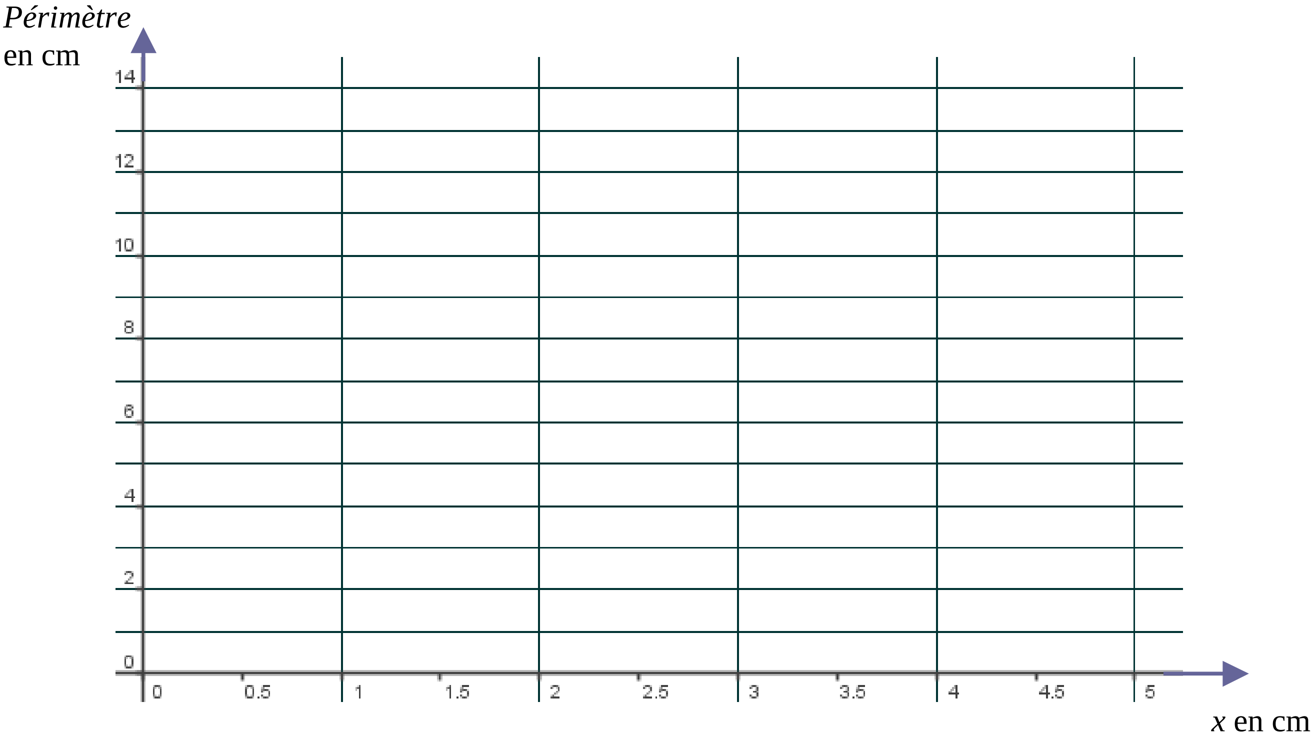
2. Prouver que le **périmètre** du rectangle APMQ est égal à $8 - \frac{x}{2}$.

3. Exprimer en fonction de x le **périmètre** du triangle BPM. Donner la réponse sous forme réduite.

❖ Partie B : les fonctions

1. Expliquer pourquoi $0 \leqslant x \leqslant 4$.
2. Construire dans le repère ci-dessous les **représentations graphiques** des fonctions :

$x \longmapsto 3x$ et $x \longmapsto 8 - \dfrac{x}{2}$ pour x compris entre 0 et 4.



3. Par simple lecture graphique, dire :
   a. pour quelle valeur de x APMQ et BPM ont le même périmètre ?
   b. Quel est ce périmètre ?

Marquer des pointillés sur le graphique pour indiquer vos lectures et répondre par des phrases

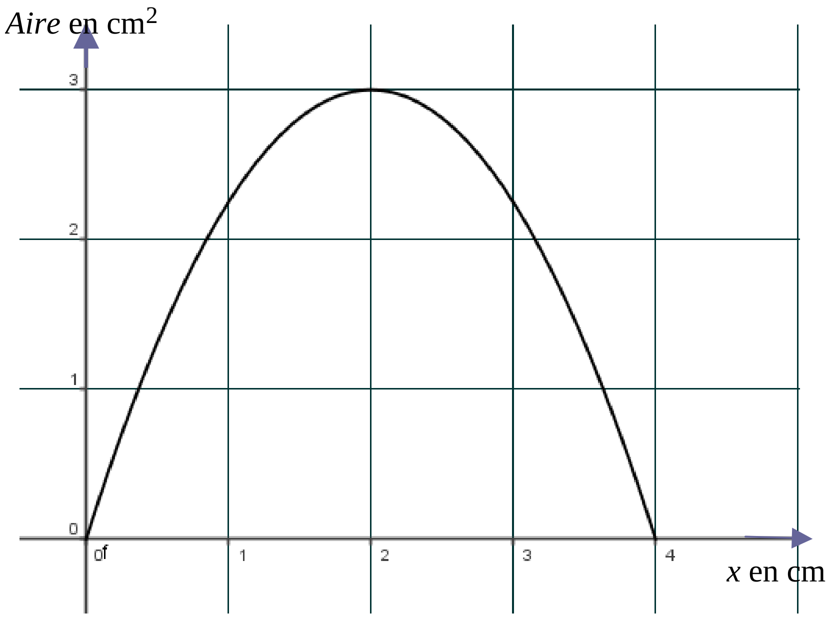
4. Trouver **par un calcul** la valeur exacte de x pour laquelle APMQ et BPM ont le même périmètre.

❖ Partie C : une aire

1. Exprimer en fonction de x l'**aire** du rectangle APMQ.

Prouver en développant, que cette aire peut s'écrire $-\dfrac{3}{4}x^2 + 3x$.

2. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto -\dfrac{3}{4}x^2 + 3x$



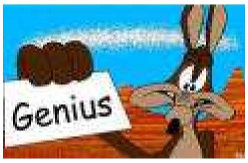
Répondre aux questions suivantes **par lecture graphique**, dans votre copie :

a) Si x = 1 cm, quelle est l'aire du rectangle APMQ ?

b) Pour quelle valeur de x l'aire de APMQ est elle maximale ?

c) Pour que l'aire de APMQ soit 1 cm^2, combien doit valoir x ?

CORRIGE



Activités numériques (12 points)

Exercice 1

1.

$$A = -\frac{1}{3} + \frac{14}{3} \div \frac{35}{12}$$

$$A = -\frac{1}{3} + \frac{14}{3} \times \frac{12}{35}$$

$$A = -\frac{1}{3} + \frac{2 \times \cancel{7} \times \cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times \cancel{7} \times 5}$$

$$A = -\frac{1}{3} + \frac{8}{5}$$

$$A = -\frac{5}{15} + \frac{24}{15}$$

$$\boxed{A = \frac{19}{15}}$$

2.

$$B = \frac{81 \times 10^{-5} \times 14 \times \left(10^2\right)^3}{7 \times 10^4}$$

$$B = \frac{81 \times 2 \times \cancel{7}}{\cancel{7}} \times \frac{10^{-5} \times 10^6}{10^4}$$

$$B = 162 \times 10^{-5+6-4}$$

$$\boxed{B = 162 \times 10^{-3}}$$

$\boxed{B = 0{,}162}$ (écriture décimale)

$\boxed{B = 1{,}62 \times 10^{-1}}$ (écriture scientifique)

3. a.

$$C \times D = \left(2 - \sqrt{2}\right)\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

$$C \times D = (2)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$C \times D = 4 - 2$$

$$\boxed{C \times D = 2}$$

C×D est bien un nombre entier

b. $C^2 = \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2$ $\boxed{C^2 = 6 - 4\sqrt{2}}$

4. $E = 2\sqrt{9 \times 5} - 5\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{16 \times 5} = 6\sqrt{5} - 10\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$ $\boxed{E = -8\sqrt{5}}$

Exercice 2

Pour les Jeux Olympiques d'hiver, un magasin de sport affiche un article à 120 €.

1. Effectuer une réduction de 20 % est associé à la fonction linéaire $f : x \longmapsto \left(1 - \frac{20}{100}\right) x$

Soit $f : x \longmapsto 0{,}8\,x$

$f : 120 \longmapsto 0{,}8 \times 120 = 96$ *Le prix après remise est 96€.*

2. Effectuer une hausse de 10 % est associé à la fonction linéaire $f : x \longmapsto \left(1 + \frac{10}{100}\right) x$

Soit $f : x \longmapsto 1{,}1\,x$

$f : 96 \longmapsto 1{,}1 \times 96 = 105{,}6$ *Le prix augmenté est 105,6 €.*

3. Le prix initial est 120 €, le prix final est 105,6 €

La fonction linéaire qui permet de passer du premier prix au second est $x \longmapsto 0{,}88\,x$

(car 105,6 ÷ 120 = 0,88)

Il s'agit donc d'une remise de 12 %

Exercice 3

On donne la fonction f définie par : $f(x) = (2x-3)(3x-1)+(2x-3)^2$

1. $f(x) = (2x-3)(3x-1)+(2x-3)^2$

$f(x) = 6x^2-9x-2x+3+4x^2-12x+9$

$\boxed{f(x) = 10x^2-23x+12}$

2.

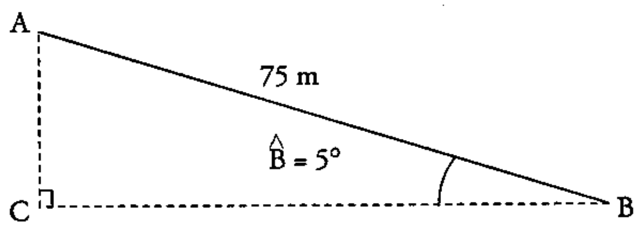
$f(\sqrt{2}) = 10(\sqrt{2})^2-23(\sqrt{2})+12$

$f(\sqrt{2}) = 20-23\sqrt{2}+12$

$\boxed{f(\sqrt{2}) = 32-23\sqrt{2}}$

Activités géométriques (12 points)

Exercice 1



1. Dans le triangle ABC rectangle en C :

$\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{BC}{AB}$

$\cos(5°) = \dfrac{BC}{75}$

$BC = 75\times\cos(5°)$

$\boxed{BC \approx 74{,}71 m}$

2. Dans le triangle même ABC rectangle en C :

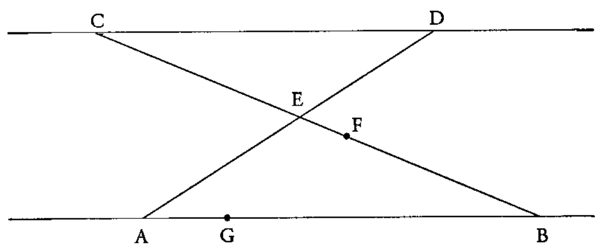
$\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{AB}$

$\sin(5°) = \dfrac{AC}{75}$

$AC = 75\times\sin(5°)$

$\boxed{AC \approx 6{,}53 m}$

Exercice 2



On donne : DE = 6 AE = 10 AB = 20 et BE = 16

On donne : BF = 12,8 et BG = 16.

1. Les droites (AD) et (BC) sont sécantes en E, les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

On applique le ***théorème de Thalès*** :

$\dfrac{EA}{ED} = \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{CD}$

$\dfrac{10}{6} = \dfrac{20}{CD}$

$10\times CD = 6\times 20$

$10\times CD = 120$

$\boxed{CD = 12 \text{ cm}}$

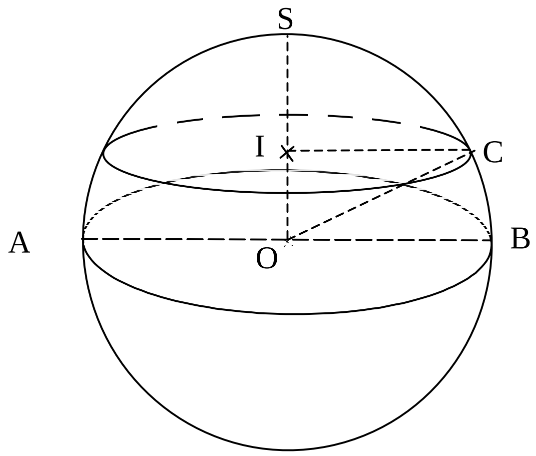
2. Calculons d'une part : $\frac{BF}{BE} = \frac{12{,}8}{16} = 0{,}8$

Calculons d'autre part : $\frac{BG}{BA} = \frac{16}{20} = 0{,}8$

donc $\frac{BF}{BE} = \frac{BG}{BA}$

De plus, les points B, F, E d'une part et B, G, A, d'autre part, sont alignés dans le même ordre.

Donc, d'après la ***réciproque du théorème de Thalès*** : $\boxed{(FG)//(EA)}$.



Exercice 3

1. Calculer le volume de la boule ;

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 30^3$

$V = 36000\pi \text{ cm}^3$

$V \approx 113\ 097 \text{ cm}^3$

$\boxed{V \approx 113 \text{ litres (arrondi au litre) est le volume de la boule}}$

2. On donne SB = 30 $\sqrt{2}$. Prouver que la droite (SO) est perpendiculaire à la droite (AB).

- Calculons d'une part $SB^2 = (30\sqrt{2})^2 = 900 \times 2 = 1800$
- Calculons d'autre part $SO^2 + OB^2 = 30^2 + 30^2 = 900 + 900 = 1800$

Comme $SB^2 = SO^2 + OB^2$ alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, SOB est rectangle en O

$\boxed{\text{Donc la droite (SO) est perpendiculaire à la droite (AB).}}$

3. Soit **I le milieu de [SO]**. On coupe la boule par un plan passant par I et perpendiculaire à (SO).

a. Dessiner à l'échelle $\frac{1}{5}$ le triangle OIC.

b. Calculer le rayon du disque obtenu comme section. Donner l'arrondi au centimètre.

Dans le triangle IOC rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore : $OC^2 = OI^2 + IC^2$

$30^2 = 15^2 + IC^2$

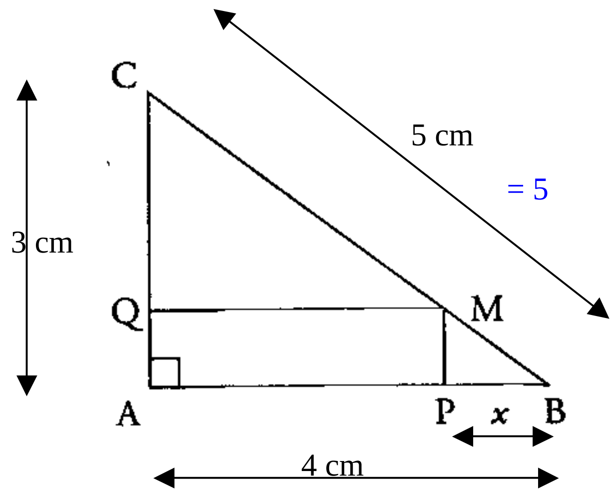
$IC^2 = 900 - 225$

$IC = \sqrt{675}$ cm

$\boxed{IC \approx 25{,}98 \text{ cm}}$

Problème (12 points)

AB = 4 cm AC = 3 cm et BC = 5 cm.



❖ Partie A : un périmètre

1. En utilisant le théorème de Thalès, prouver que :

$PM = \frac{3x}{4}$ et $BM = \frac{5x}{4}$

Les droites (CM) et (AP) sont sécantes en B

Les droites (CA) et (MP) sont parallèles (car APMQ est un rectangle)

Donc d'après le théorème de **Thalès** : $\dfrac{BP}{BA} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{PM}{AC}$

Donc : $\dfrac{x}{4} = \dfrac{PM}{3}$ donc $\boxed{PM = \dfrac{3x}{4}}$

Et : $\dfrac{x}{4} = \dfrac{BM}{5}$ donc $\boxed{BM = \dfrac{5x}{4}}$

2. Prouver que le **périmètre** du rectangle APMQ est égal à $8 - \dfrac{x}{2}$.

Le périmètre de APMQ est égal à : $\mathcal{P} = 2\times AP + 2\times PM$

$\mathcal{P} = 2\times(4 - x) + 2\times\dfrac{3x}{4}$

$\mathcal{P} = 8 - 2x + \dfrac{3x}{2}$

$\mathcal{P} = 8 - \dfrac{4x}{2} + \dfrac{3x}{2}$

$\boxed{\mathcal{P} = 8 - \dfrac{x}{2}}$

3. Exprimer en fonction de x le **périmètre** du triangle BPM. Donner la réponse sous forme réduite.

Le périmètre du triangle BPM est égal à : $\mathcal{P}' = BP + PM + MB$

$\mathcal{P}' = x + \dfrac{3x}{4} + \dfrac{5x}{4}$

$\mathcal{P}' = x + \dfrac{8x}{4}$

$\mathcal{P}' = x + 2x$

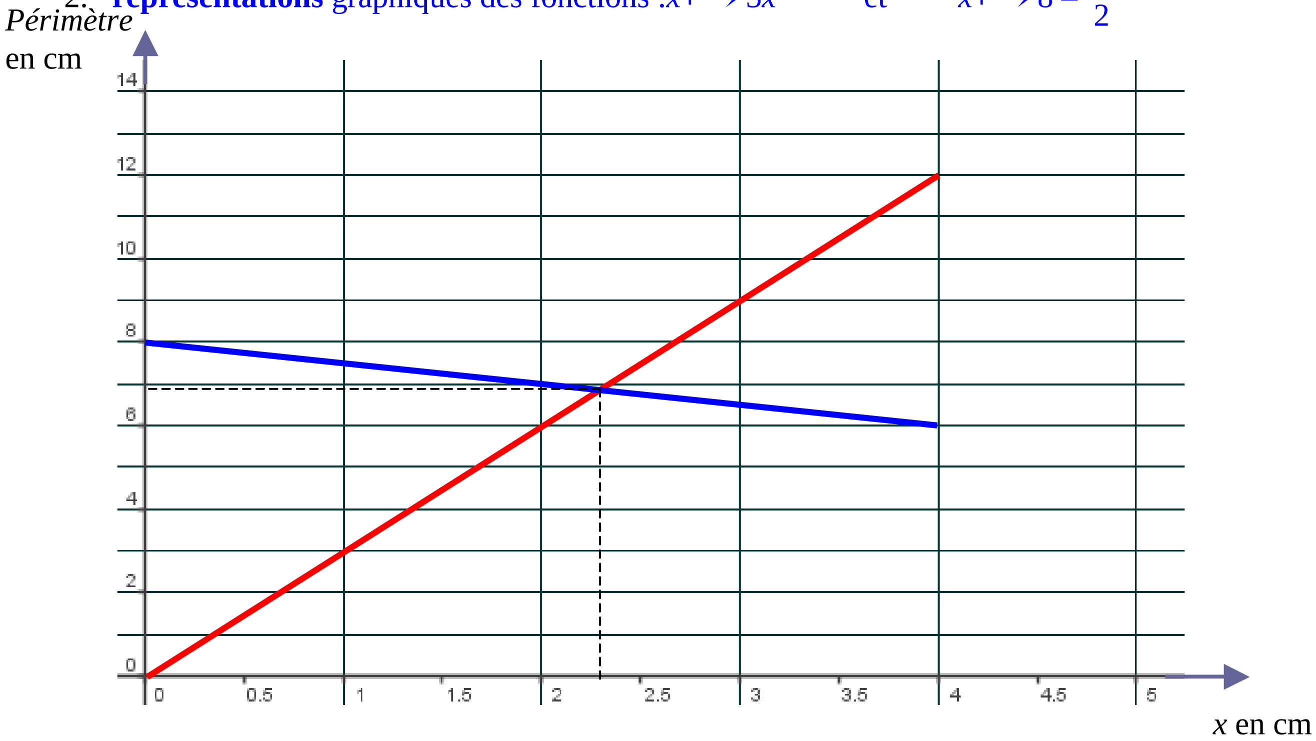
$\boxed{\mathcal{P}' = 3x}$

❖ Partie B : les fonctions

1. Expliquer pourquoi $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Le point P appartenant au segment [AB] de longueur 4cm, la longueur BM est comprise entre 0 et 4 cm.

2. **représentations** graphiques des fonctions : $x \longmapsto 3x$ et $x \longmapsto 8 - \dfrac{x}{2}$



3. Par simple lecture graphique, dire :
   a. APMQ et BPM ont le même périmètre pour **x environ égal à 2,3 cm**.

   b. Ce périmètre commun est **environ 7 cm**.

4. Trouver **par un calcul** la valeur exacte de x pour laquelle APMQ et BPM ont le même périmètre.

On résout l'équation $3x = 8 - \frac{x}{2}$

$3x + \frac{x}{2} = 8$

$3{,}5\,x = 8$

$\boxed{x = \frac{8}{3{,}5} = \frac{16}{7} \text{ cm}}$

APMQ et BPM ont le même périmètre si $x = \frac{16}{7}$ cm

❖ Partie C : une aire

1. Exprimer en fonction de x l'**aire** du rectangle APMQ. Prouver que cette aire peut s'écrire $-\frac{3}{4}x^2 + 3x$.

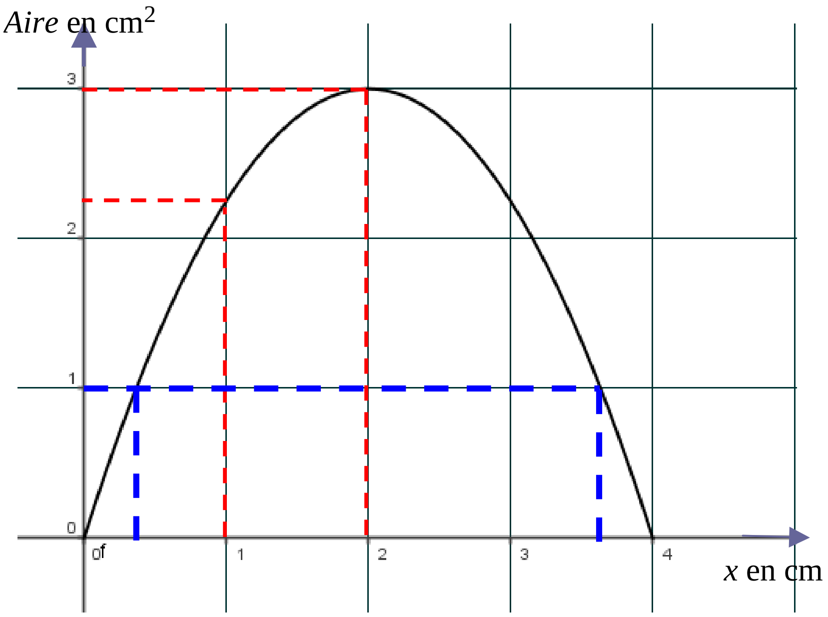
$\mathcal{A} = AP \times PM$

$\mathcal{A} = (4 - x) \times \frac{3x}{4}$

$\mathcal{A} = 4 \times \frac{3x}{4} - x \times \frac{3x}{4}$

$\boxed{\mathcal{A} = -\frac{3}{4}x^2 + 3x.}$

2. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto -\frac{3}{4}x^2 + 3x$



a) Si x = 1 cm, l'aire du rectangle APMQ est **environ 2,3 cm²**.

b) L'aire de APMQ est elle maximale **si x vaut 2 cm**

c) Pour que l'aire de APMQ soit 1 cm², **x doit valoir environ 0,3 cm ou 3,7 cm**