BREVET BLANC de MATHEMATIQUES n° 2
avril 2008 - durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées.
*L'orthographe, le soin et la présentation sont notés sur **4 points**.*

NE PAS OUBLIER DE RENDRE LA FEUILLE ANNEXE

Activités numériques (12 points)

Exercice 1

1. On donne : A = $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\div\frac{2}{5}$

Calculer le nombre A. Écrire les étapes et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

2. On donne B= $\dfrac{16\times10^{-1}\times2}{\left(10^{3}\right)^{2}\times80\times10^{-8}}$

Calculer le nombre B. Vérifier que B est un nombre entier .

Exercice 2

On donne les nombres C = $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ et D = $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Calculer sous la forme la plus simple possible : C+ D ; C – D ; C $\times$ D.

Exercice 3

1. Soit E = $2\sqrt{24}-\sqrt{600}+\sqrt{96}$. Ecrire E sous la forme $a\sqrt{6}$ (où a est un entier).

2. Soit F = $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)$. Développer et réduire D

Exercice 4

En 2006 une entreprise a augmenté ses ventes de 30%. En 2007, les ventes ont encore augmenté, cette fois-ci de 20%.
Calculer l'augmentation globale en pourcentage sur ces deux années.

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x(2x-7)=0$

2. $4x^2=100$

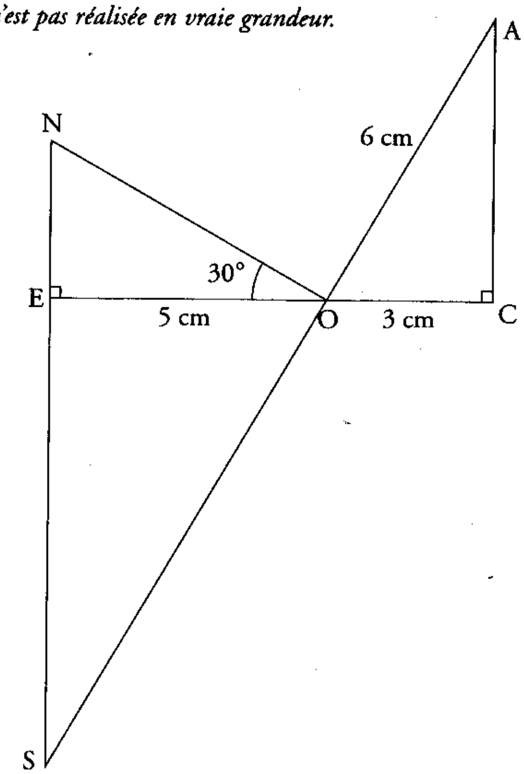
3. $5x+3<0$ (représenter graphiquement les solutions sur un axe gradué).

Activités géométriques (12 points)

Exercice 1

On donne :

La figure n'est pas réalisée en vraie grandeur.



- EO = 5 cm ; OC = 3 cm et OA = 6 cm.
- Les points E, O et C sont alignés.
- Les triangles ENO et OCA sont respectivement rectangles en E et en C. La droite (AO) coupe la droite (NE) en S.

1. Prouver que AC = $3\sqrt{3}$ cm.

2. a) Prouver que les droites (NS) et (AC) sont parallèles.

b) Calculer les valeurs exactes de OS et de ES.

3. Calculer ON sachant que $\widehat{NOE} = 30°$. Arrondir au millimètre.

4. a) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{COA}$.

b) Démontrer que le triangle SON est rectangle.

Exercice 2

Sur la feuille donnée en **annexe**, tracer un carré EFGH de côté 6 cm.

1. Construire le point J tel que $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{EF}$.

2. Construire le point K tel que $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}$.

Exercice 3

1. Sur le quadrillage donné en **annexe**, construire :

- La figure $\mathfrak{F}_1$, image de la figure $\mathfrak{F}$ par la symétrie de centre B (nommer E l'image de A).
- La figure $\mathfrak{F}_2$, image de la figure $\mathfrak{F}_1$ par la symétrie de centre C (nommer T l'image de E).

On hachurera sur le dessin les figures $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ ainsi obtenues.

2. Quelle transformation permet de passer **directement** de la figure $\mathfrak{F}$ à la figure $\mathfrak{F}_2$?

Problème (12 points)

Sur une page entière, tracer un repère orthonormal (O, I, J) d'unité **le centimètre**.

Placer les points A (6 ; 5) B (2 ; – 3) C (– 4 ; 0)

1. Calculer la longueur AB. Prouver que AB = $4\sqrt{5}$.

2. On **donne** de plus : AC = $\sqrt{125}$ et BC = $\sqrt{45}$.
   Déterminer la nature du triangle ABC. Justifier la réponse.

3. Calculer l'aire du triangle ABC. Montrer que le résultat est un nombre entier naturel.

4. On considère le cercle circonscrit au triangle ABC.

   a) Préciser la position de son centre appelé K, et la longueur de son rayon. Justifier.
   Placer K.

   b) Calculer les coordonnées du centre K.

5. a) Construire le point E, symétrique de B par rapport au point K.

   b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCE ? Justifier très soigneusement.

6. a) Placer le point D tel que ACBD soit un parallélogramme.

   b) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CA}$.

   c) En déduire par le calcul les coordonnées du point D.

Question BONUS (facultatif)

Un point M a pour coordonnées (– 5 ; *y*).

Déterminer par le calcul la valeur de *y* pour que l'angle $\widehat{ACM}$ soit un angle droit.

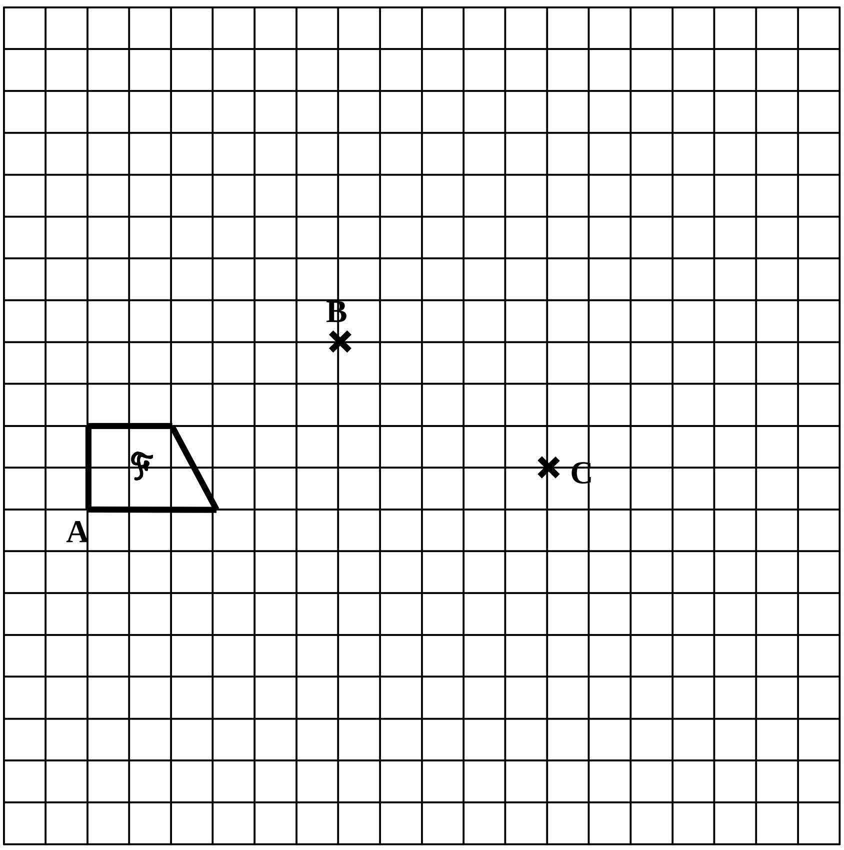
NE PAS OUBLIER DE
RENDRE LA
FEUILLE ANNEXE

annexe à rendre avec la copie

Numéro d'anonymat : ……………………

ACTIVITES GEOMETRIQUES : EXERCICE 2

ACTIVITES GEOMETRIQUES : EXERCICE 3



CORRIGE BREVET BLANC de MATHEMATIQUES
avril 2008 - durée : 2 heures

Activités numériques (12 points)

Exercice 1

3. $A = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{2}{5}$

$A = \left(\frac{6}{10} - \frac{5}{10}\right) \div \frac{2}{5}$

$A = \frac{1}{10} \times \frac{5}{2}$

$A = \frac{1 \times \cancel{5}}{2 \times \cancel{5} \times 2}$

$\boxed{A = \frac{1}{4}}$

2. $B = \frac{16 \times 10^{-1} \times 2}{\left(10^3\right)^2 \times 80 \times 10^{-8}}$

$B = \frac{\cancel{8} \times \cancel{2} \times 2 \times 10^{-1}}{\cancel{8} \times \cancel{2} \times 5 \times 10^6 \times 10^{-8}}$

$B = 0{,}4 \times \frac{10^{-1}}{10^{-2}}$

$B = 0{,}4 \times 10^{-1-(-2)}$

$B = 0{,}4 \times 10^1$

$\boxed{B = 4}$ B est bien un nombre entier

Exercice 2

On donne les nombres $C = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $D = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

$C + D = 2\sqrt{3} + \cancel{\sqrt{2}} + 2\sqrt{3} - \cancel{\sqrt{2}}$

$\boxed{C + D = 4\sqrt{3}}$

$C + D = 2\sqrt{3} + \sqrt{2} - \left(2\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

$C + D = \cancel{2\sqrt{3}} + \sqrt{2} - \cancel{2\sqrt{3}} + \sqrt{2}$

$\boxed{C + D = 2\sqrt{2}}$

$C \times D = \left(2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

$C \times D = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{2}^2$

$C \times D = 4 \times 3 - 2$

$\boxed{C \times D = 10}$

Exercice 3

$E = 2\sqrt{24} - \sqrt{600} + \sqrt{96}$

$E = 2\sqrt{4 \times 6} - \sqrt{100 \times 6} + \sqrt{16 \times 6}$

$E = 2 \times 2\sqrt{6} - 10\sqrt{6} + 4\sqrt{6}$

$\boxed{E = -2\sqrt{6}}$

$F = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + 5\sqrt{2}\right)$

$F = 3 + 5\sqrt{6} - \sqrt{6} - 5 \times 2$

$\boxed{F = 4\sqrt{6} - 7}$

Exercice 4

Soit x le prix initial.

- Après l'augmentation de 30%, ce prix est multiplié par $1 + \frac{30}{100} = 1{,}3$. Il vaut donc $1{,}3\,x$.
- Après l'augmentation de 20%, ce nouveau prix est multiplié par $1 + \frac{20}{100} = 1{,}2$.

Il vaut donc finalement $1{,}3\,x \times 1{,}2 = 1{,}56\,x$.

$x \longmapsto 1{,}3\,x \longmapsto 1{,}56\,x$

Appelons p le pourcentage total d'augmentation.

On a alors $1 + \frac{p}{100} = 1{,}56$

Donc $\frac{p}{100} = 0{,}56$

Donc $p = 0{,}56 \times 100 = 56$

$\boxed{\text{Il s'agit donc d'une hausse de 56 \%.}}$

Exercice 5

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

4. $x(2x-7)=0$

Si le produit est nul, alors au moins un des facteurs est nul, donc :

$x=0$ **ou** $2x-7=0$

$2x=7$

$x=3{,}5$

$\boxed{\text{Les solutions sont 0 et 3,5.}}$

5. $4x^2=100$

$x^2=100\div 4$

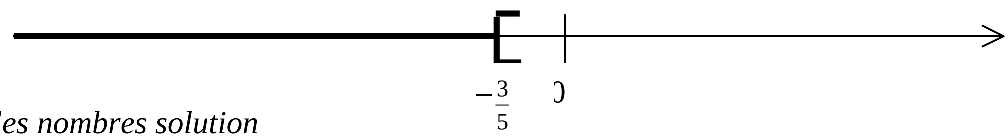
$x^2=25$

$\boxed{\text{Les solutions sont } \sqrt{25}=5 \quad \text{et} \quad -\sqrt{25}=-5}$

6. $5x+3<0$

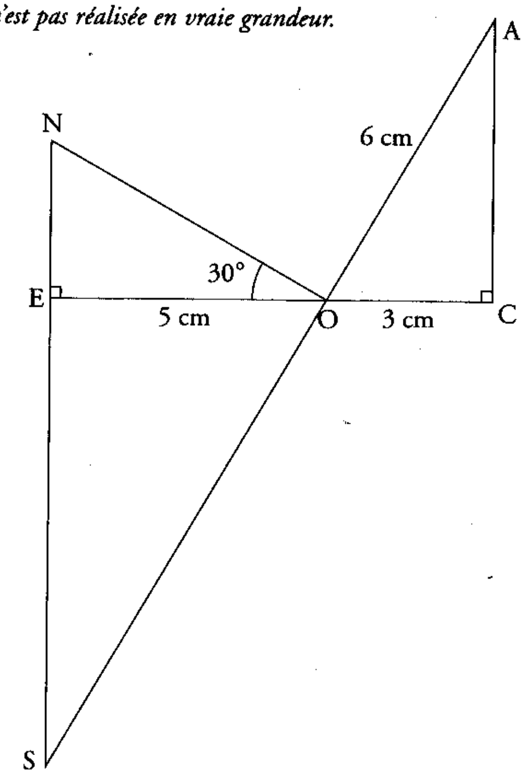
$5x<-3$

$x<\frac{-3}{5}$



Je représente en gras les nombres solution

La figure n'est pas réalisée en vraie grandeur.



Activités géométriques (12 points)

Exercice 1

5.

Dans le triangle OAC rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$OA^2 = OC^2 + CA^2$

$6^2 = 3^2 + CA^2$

$CA^2 = 36 - 9$

$CA^2 = 27$

$\boxed{CA = \sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}}$

6. a) Les droites (NS) et (AC) sont perpendiculaires à la droite (EC) donc $\boxed{\text{elles sont parallèles}}$.

b)
On sait que : les droites (EC) et (AS) sont **sécantes en O**, les droites (NS) et (AC) sont **parallèles**.
On applique le **théorème (direct) de Thalès** :

$$\frac{OA}{OS} = \frac{OC}{OE} = \frac{AC}{SE}$$

Donc $\frac{6}{OS} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $OS = \frac{6 \times 5}{3}$ $\qquad$ $\boxed{OS = 10 \text{ cm}}$

Et $\frac{3}{5} = \frac{3\sqrt{3}}{SE}$ $\qquad$ $SE = \frac{\cancel{3}\sqrt{3} \times 5}{\cancel{3}}$ $\qquad$ $\boxed{SE = 5\sqrt{3} \text{ cm}}$

7. Dans le triangle NOE rectangle en O,

$\cos\left(\widehat{NOE}\right) = \frac{OE}{ON}$ $\qquad$ $\cos 30° = \frac{5}{ON}$ $\qquad$ $ON = \frac{5}{\cos 30°}$ °

On sait que cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ donc ON = $\frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{10}{\sqrt{3}}}$

$\boxed{ON \approx 5{,}8 \text{ cm}}$ (arrondi au mm)

8. a) Dans le triangle COA rectangle en C,

$\cos\left(\widehat{COA}\right) = \frac{CO}{OA}$ $\qquad$ $\cos\left(\widehat{COA}\right) = \frac{3}{6}$ $\qquad$ $\boxed{\widehat{COA} = 60°}$

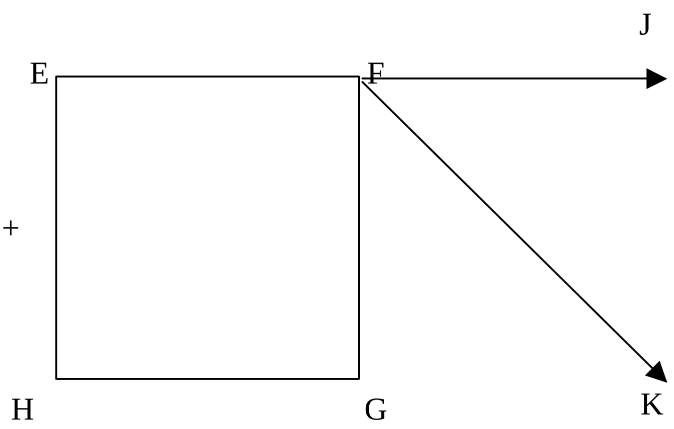
b) Les angles $\widehat{COA}$ et $\widehat{EOS}$ sont **opposés par le sommet** donc ils ont même mesure : 60°.

On a donc $\widehat{SON} = \widehat{SOE} + \widehat{EON}$

$\widehat{SON} = 60 + 30$

$\widehat{SON} = 90°$. $\boxed{\text{Le triangle SON est donc bien rectangle en O}}$.

Exercice 2

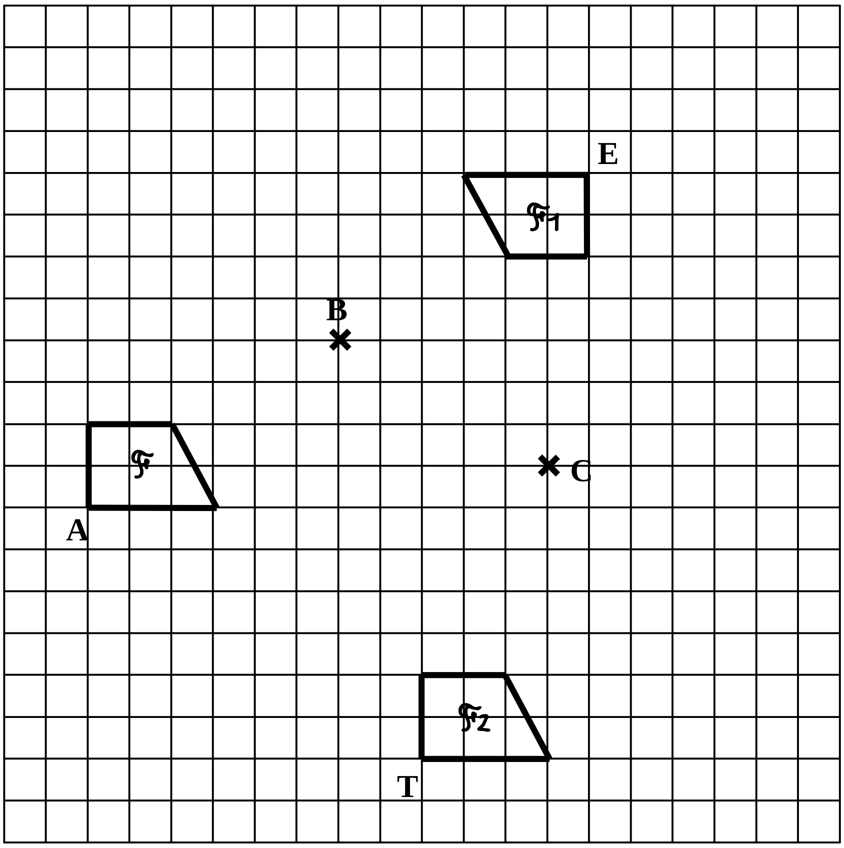


3. Construire le point J tel que $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{EF}$.

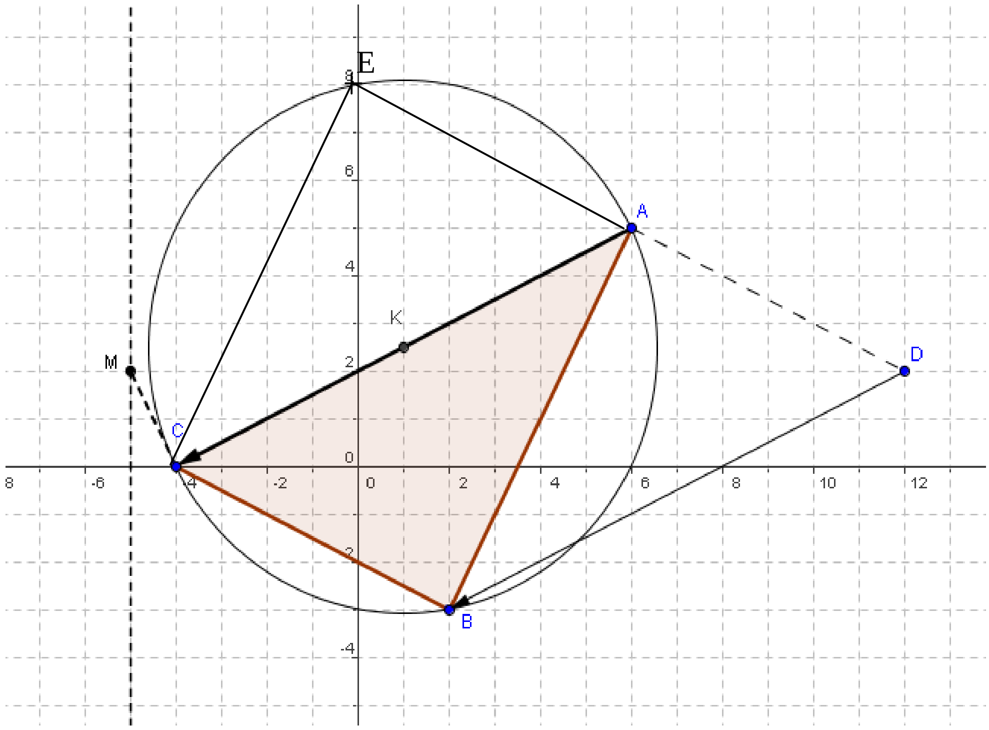
4. Construire le point K tel que $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}$.

Exercice 3

On peut passer **directement** de la figure $\mathfrak{F}$ à la figure $\mathfrak{F}_2$ par la $\boxed{\text{translation de vecteur } 2\ \overrightarrow{BC}}$



Problème (12 points)



1. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ $\quad AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-3-5)^2}$ $\quad AB = \sqrt{16+64}$

$AB = \sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5}$ $\quad \boxed{AB = 4\sqrt{5}}$

2. On sait que dans le triangle ABC : AB = $4\sqrt{5}$ cm, AC = $\sqrt{125}$ cm et BC = $\sqrt{45}$ cm.

- Calculons d'une part AC^2

  $AC^2 = \sqrt{125}^2 = 125$

- Calculons d'autre part $AB^2 + BC^2$

  $AB^2 + BC^2 = \sqrt{80}^2 + \sqrt{45}^2 = 80 + 45 = 125$

Dans le triangle ABC, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, donc d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, <u>ABC est un triangle rectangle en B.</u>

3. aire de ABC = $\dfrac{BA\times BC}{2} = \dfrac{4\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\cancel{2}\times2\times3\times5}{\cancel{2}} = 30$ $\boxed{\text{aire de ABC = 30 cm}^2}$.

4.a. Le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse.
<u>K est donc le milieu de [AC]</u>.

Le rayon vaut la moitié de la longueur de l' hypoténuse. Donc il est égal à $\dfrac{\sqrt{125}}{2}$ ou encore $\boxed{\dfrac{5\sqrt{5}}{2}}$ cm.

b. On a K $\left(\dfrac{x_A + x_C}{2}; \dfrac{y_A + y_C}{2}\right)$ K $\left(\dfrac{6-4}{2}; \dfrac{5+0}{2}\right)$ $\boxed{K\left(1; \dfrac{5}{2}\right)}$

5.b. On sait que K est le milieu de [AC].
De plus, E est le symétrique de B par rapport au point K donc K est aussi le milieu de [EB].
Le quadrilatère ABCE a ses diagonales de même milieu donc c'est un <u>parallélogramme</u>.

De plus, on a déjà démontré que le triangle ABC était rectangle en B.

Or si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle,
Donc $\boxed{\textbf{ABCE est un rectangle}}$.

6. b. $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 6+4 \\ 5-0 \end{pmatrix}$ $\boxed{\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}}$

c. Comme ACBD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$.
Lorsque deux vecteurs sont égaux, leurs couples de coordonnées sont égaux.

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{pmatrix}$, on obtient alors les équations : $\begin{cases} x_D - 2 = 10 \\ y_D + 3 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x_D = 12 \\ y_D = 2 \end{cases}$ $\boxed{D\ (12\,;2)}$

<u>Question BONUS (facultatif)</u>

1. Le triangle AMC est rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore : $AC^2 + CM^2 = AM^2$, or :

$AC^2 = 125$ $CM^2 = (-5+4)^2 + (y-0)^2$

et $AM^2 = (-5-6)^2 + (y-5)^2$

En remplaçant dans la relation : $125 + 1 + y^2 = 121 + y^2 - 10y + 25$

$126 + \cancel{y^2} = 146 + \cancel{y^2} - 10y$ $10y = 146 - 126$ $y = 2$

$\boxed{\text{Le point M a pour ordonnée 2}}$.